



TITLE:

『大成算経』の「雑技」について
(『大成算経』の数学的・歴史学的
研究)

AUTHOR(S):

小川, 束

CITATION:

小川, 束. 『大成算経』の「雑技」について (『大成算経』の数学的・
歴史学的研究). 数理解析研究所講究録 2013, 1831: 66-84

ISSUE DATE:

2013-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194837>

RIGHT:

『大成算経』の「雑技」について
On Miscellaneous Techniques in the Taisei Sankei

小川 東 (Ogawa, Tsukane)
四日市大学
Yokkaichi University

はじめに

『大成算経』の『五技』および『雑技』は日本において初めて珠算による計算法を体系的に記述したもので、近世日本数学史において重要な意義を有するのであるが、近年ほとんど議論された形跡がない¹。現在、数学史名古屋セミナーにおいて『大成算経』の現代語訳を試みているが、改めて正確に訳そうとすると、不明な点が種々出現する。珠算法の研究は近世日本数学史において忘れ去られている観がある。

本稿は『雑技』「相乗」の冒頭部分——『雑技』全体の序文と「相乗」の要約部分——の現代語訳を提示するのが目的である。以下、第1節では『大成算経』以前の計算文化に関していくつかの問題提起をしておく。第2節は『雑技』における珠算法を要約する。第3節は第2節の補足として『大成算経』と中国の元来の名称の異同について先行研究を紹介しておく。

1 『大成算経』以前の計算文化

1.1 鎌倉時代の計算

近世との比較において中世の計算技術、計算量の状況を把握するには室町時代を見るのが良いかもしれないが、ここではさらにその前の鎌倉時代の様子をごく簡単に例示しておく。以下は債務に付随する利息計算と荘園年貢の決算書である算（散）用状である。

利銭算用状²

唐禅院宰相殿出銭事

合拾壹貫九百三十文也、

弘安三年³自十月今年七月マテ廿三ヶ月也、

本五貫文〈三文入定〉利分廿三ヶ月ニハ三貫四百五十文

本利合定八貫四百五十文也、

去四月二本三貫文四貫入利分七月マテ四百八十文

本利合三貫四百五十⁴文也、

惣都合拾壹貫九百三十文也、

弘安三年八月一日請取之、 貞定房大

唐禅院⁵、宰相殿⁶

¹後藤「大成算経の前集の研究」『京都大学数理解析研究所講究録』1195（2001）128-138、に僅かに言及がある。

²『鎌倉遺文』第45巻、233ページ。

³1280年。

⁴原文のママ。

⁵東大寺。

⁶実賢。

これは、5貫の借り入れに対して毎月150文の利息が（閏月を含む）23ヶ月間発生し、元利合計で $5000 + 150 \times 23 = 8450$ （文）となり、さらに、3貫に対して120文の利息が4か月で元利合わせて $3000 + 120 \times 4 = 3480$ （文）、これらを加えて総計 $8450 + 3480 = 11930$ （文）になるという計算である。

（2）年貢算用状⁷

注進大山⁸庄正安三年⁹貫首御分御年貢散用事

合五町参段四十八代者〈此子細先度注進了、〉

除

壹町 職掌等中新給〈保寿院之時、以貫首御分田中、加給之、〉

定残 貫首御分田 四丁三段四十八代

分米十四石六斗五升三合〈三分一得之、〉

三石 夏供米

四石 講堂修正壇供百十二枚分米〈仏聖斗二ハ四石四斗八升〉

八斗七升 同壇供木手・雑事并買替減分

二石八斗 代錢二貫八百文〈去三月晦日供御用途、本二貫・利八百文〉

二石四斗 代錢二貫四百文同〈七月供御、子細同前、〉

二斗七升七合 代錢二百七十七文〈九月九日八幡宮御節供餅十・折敷十七料〉

六升 代錢六十文〈同時酒一瓶子・肴二種料〉

一石一斗六升二合 代錢一貫百六十二文〈正月分節供用途、本七百五十・利四百十二文〉

一石八升七合 代錢一貫八十七文〈三月分節供用途、子細同、〉

一石一升二合 代錢一貫十二文〈五月節供用途、子細同、〉

九斗三升七合 代錢九百三十七文〈七月節供用途、子細同、〉

已上十七石八斗一升五合¹⁰

過上四石八斗一升五合

右、注進如件、

正安三年十一月 日 雑掌上

これは年貢を担保に借錢し、その決算をしたものであろう。冒頭に分米の計算があり、後半は実際の用途が石数および代錢で一覽されている。不明な点も多いが、おおよその計算は

3石
4石
0石87
2石8
2石4
0石277
0石06
1石162
1石087
1石012
0石937

⁷『鎌倉遺文』第27巻、343-344ページ。

⁸丹波

⁹1301年。

¹⁰十七石六斗五合か。

を合計することで、最後に分米を4石8斗1升5合超過していることが記されている。年貢算用状においては計算の誤りがあるように思われるが、それでも当時、金銭借用時の利息計算や年貢計算が細かく行なわれていたことは理解できよう。

これらの史料においては加法、減法、乗法が見られる一方、除法が見られないことに注意しておきたい。管見の範囲内では除法の例を抽出することができなかったが、『平安遺文』、『鎌倉遺文』に見出せるのかもしれない。また、中世における計算がなんらかの器具を利用したものなのか、筆算にしてもどのように実行されたのか、といった基本的な問題は未だ解明されていない。さらに豊富な計算が存在するということはその計算技術を指導する者あるいは書物の存在を確信させるが、未だ十分な史料は発見されていない。いずれにせよさらなる史料の探索が求められる。日本史学において中世債務史の研究が必ずしも重要視されていないように、数学史においても中世の計算技術、計算量の研究はあまりないようである。今後の研究を待ちたい。

1.2 珠算と算木

算木は加減乗除の計算と方程式の解法の両方に用いることができるが、加減乗除にはそろばんのほうがはるかに便利であり、方程式の解法に対しても、負数が出なければ複数のそろばんによってこれを実行することができる。当然、これらのことは17世紀の早い時期に認識されていた。たとえば、『塵劫記』では開平、開立の計算がそろばんを並べることによって例示されている。さらに西川勝基『算学級聚抄』第1巻の「平方立方三乗四乗五乗開式」では『塵劫記』と同様に、複数のそろばんを並置して開平以下6乗根まで計算する方法が例示されている。なお、第2巻「正負從廉隅術明」、第3巻「算学啓蒙開方釈鎖門（三十四問）和術」、第4、5巻「自問自答術（五十問）」は目録にはあるものの未見である。

『算学級聚抄』に関連して西川勝基『算法指南録』全5巻（1684）があり、その目録は第1巻「平方立方三乗四乗五乗の方開之図術」、第2巻「翻法開之図術」、第3巻「算学啓蒙開方釈鎖門（三十四問）和術」、第4、5巻「自問自答術（五十問）」となっている¹¹。第1巻は題名は若干異なるが、内容は同一である。その序文中に「和邦之算盤及漢法之算木」との言葉がある。「算盤」とはそろばんのことであろう。西川は算盤を日本のもの、算木を中国伝来のものと見ていたようである。その認識は誤りに違いないし、17世紀後半の算書の著者らの共通理解あるいは共通の感覚として珠算が「和邦」のものであったかどうかは疑問であるが、このことは珠算がそれほど浸透していたことの傍証である。珠算の浸透は『塵劫記』などの出版競争を見れば明らかであるが、その結果が西川をして「和邦之算盤」と言わしめたのであろう。そろばんと算木との日本への伝来した時期をはじめ、両者の関連についてのさらなる研究が求められる。

1.3 『大成算経』以前の珠算の記述

『大成算経』以前の珠算を扱った主な算書を列挙すると次のようになる。括弧の中に計算の種類を挙げておいた

1. 『算用記』（八算）
2. 『割算書』（八算）
3. 『塵劫記』（九九、八算）

¹¹西川勝基と『算法指南録』については『明治前日本数学』第1巻、岩波書店（1954）、385-386ページに簡単な記述がある。

4. 『算用記』(八算)
5. 『因帰算歌』(九因, 九帰)
6. 『諸算記』(九九こえ, 亀井割九九引さん)
7. 『万用不求算』(割算表)
8. 『参両録』(九九, 八算見一)
9. 『新編諸算記』(九九こえ, 亀井割九九引さん)
10. 『算元記』(算元九九, 九九わりかけ)
11. 『改算記』(九九, 八算, かめい割, 見一, 九九引算, いろは割)
12. 『算法闕疑抄』(九因乗, 九帰除)
13. 『算俎』(因乗帰除)
14. 『算法明備』(九九, 八算, 見一)
15. 『古今算法記』(九九, 八算割声)

『大成算経』以前の算書におけるこれらの珠算の記述を見ると、その記述は概ね画一的である。中国明代の珠算書が顕著に類型的な形式を備えていることはすでに指摘されている¹²。日本においても状況が同じであるのは、もちろん珠算法が一つの技術であり、珠算に関する記述を技術マニュアルと見れば、珠算技術が革新されない以上、記述が類型化するのも自然である。また、中世以来の実用、日用計算への珠算の適用において、加算、減算はいわゆる身体知として習得が可能であり、乗法、除法から記述を始めれば十分であるという現実的な要請もあったのであろう。珠算の社会への定着に付随する形で、珠算に関する記述にはある種の伝統が生まれ、それをあえて解体した上で新たな珠算法の記述をする必要が生じなかったとも言える。これらの点についても研究の余地はある。

2 『大成算経』の珠算

『大成算経』は珠算法記述の伝統を破りはじめて体系的な珠算法を記述をした点で画期的であった。実用計算・日用計算に供するという現実的要請、目的から逸脱して、珠算法自体の体系的記述が『大成算経』の思想であった。

2.1 五技

『大成算経』は『五技』によって始まる。五技とは和、減、因乗、帰除、商除・開方のことを言う。「開方」冒頭に「開方謂累商除者也」とあるから、これら二つは同類と考えて全体を「五技」と分類したのであろう。『五技』の構成は次の通りである。

1. 和
2. 減

¹²児玉明人『十六世紀末明刊の珠算書』富士短期大学出版部、1970、17 ページ。

3. 因乗

(a) 釈九数, (b) 九因式, (c) 留頭乗式

4. 歸除

(a) 九歸句訣, (b) 九歸式, (c) 撞除句訣, (d) 撞除式

5. 商除・開方

ここにはまず珠算による加・減・乗・除が体系的に述べられる。『大成算経』の根本的発想は分類である。分類による当時までの数学の体系化を試みたのが『大成算経』である。この点からすれば、数学を成り立たせる技能としての計算法——珠算による計算および算木による計算——が『大成算経』冒頭に議論されていることはゆえなしとしない。特に加法、減法から厳密に論じられている点が注目に値する。それまでの算書では除法とその検算としての乗法から記述を始めるのが伝統で、実際のところそれで十分であった。それを敢て加法、減法から記述した点に著者らの思想が際立っている。

『五技』最後の商除・開方は算木による計算法として記述されている。これらはいずれも珠算によっても可能である。これらが珠算ではなく算木による計算法に分類されているのはおそらく、これらがそれぞれ一次方程式、一次の項がない二次方程式の解法と意識されているのであろう。

珠算法について言うと、因乗に留頭乗法が採り上げられている点に注意をしておきたい。中国においては宋代までは乗法は被乗数の首位から掛けはじめられていたが、元代になって留頭乗法が現れた。『算学啓蒙』に名称があるが、計算法の詳細は『詳明算法』によって与えられた¹³。『算法統宗』は留頭乗法について

原有破頭乗、掉尾乗、隔位乗、総不如留頭乗之妙故皆不録

と述べている。もともと乗算には破頭乗、掉尾乗、隔位乗があったが、留頭乗が最も優れているから、留頭乗以外は述べないというのである。原理的には二数の乗法は互いにどの桁同士を乗じても、すべてを漏れなく乗じ、桁を誤らなければよいのであるが、実際問題としては微妙な違いが存在する。『大成算経』が乗法として留頭乗法を採り上げられているのは、その優劣を勘案した結果なのか、当時最も利用されている普通の方法が留頭乗法だったことに由来するのかは明確ではない。

『大成算経』から一問を例示しておく。たとえば、795に16を乗ずる場合、計算は次のように進む。まず、そろばん上に珠を次のように配置する。

(1) 1 6 7 9 5

乗数が2桁であるから、被乗数の尾位から2桁下がった位置を積の1の位（「打ち起こし」として、5に6を乗ずる。

(2) 1 6 7 9 5 3 0

次に5に1を乗ずる（このとき被乗数の末尾の5を払う）。

(3) 1 6 7 9 0 8 0

ここまでは被乗数の5が「実（被乗数）の身」である。同様の計算を被乗数の9を「実の身」として、実行する。まず9に6を乗ずる。

(4) 1 6 7 9 6 2 0

次に9に1を乗ずる。このとき被乗数の尾位（「実の身」）の9を払う。これを「実の身を破る」という。

¹³ 鈴木久男「中国における乗算法の起源」『国士舘大学政経論叢』30（1980）1-54。なお、同「中国における算法書の系譜」『国士舘大学政経論叢』31（1980）169-208。後者179ページに留頭乗法は「『算学啓蒙』（元、1299）以来の算法で、突如として表われた乗法である」とある。

(5) 1 6 7 1 5 2 0

同様の計算を被乗数の7を「実の身」として、実行する。まず7に6を乗ずる。

(6) 1 6 7 5 7 2 0

次に7に1を乗ずる。このとき被乗数の末尾（「実の身」）の7を払う（「実の身を破る」）。

(7) 1 6 1 2 7 2 0

これを逆に16に795を乗ずるとすると、初期配置は

(1) 7 9 5 1 6

となり、今度は乗数が3桁であるから、被乗数の尾位から3桁下がった位置を積の1の位（「打ち起こし」）とすることになる。そして6に5を乗ずる。

(2) 7 9 5 1 6 3 0

次に6に9を乗ずる。

(3) 7 9 5 1 6 5 7 0

次に6に7を乗ずる。ここで「実の身」の6を払う（「破る」）。

(4) 7 9 5 1 4 7 7 0

「実の身」を1として、同様の計算を繰り返す。まず1に5を乗ずる（ここでも「実の身」から3桁下がった位置が「打ち起こし」であることに注意）。

(5) 7 9 5 1 4 8 2 0

1に9を乗ずる。

(6) 7 9 5 1 5 7 2 0

1に7を乗ずる（形式的には「実の身」の1を払い（破り）、桁上がりの1を入れる）。

(7) 7 9 5 1 2 7 2 0

このように被乗数の頭位（首位）が最後まで残ることから留頭乗と呼ばれた。

2.2 雑技

『大成算経』は『五技』においてもっとも標準的な計算法を列挙した後、次の『雑技』において『五技』に述べなかった計算方法を列挙する。本稿では乗法についてのみ述べるが、一応『雑技』全体の計算法を一覧しておく。

1. 相乗

(a) 重乗, (b) 更乗, (c) 截乗, (d) 弧乗, (e) 破頭乗, (f) 掉尾乗, (g) 隔位乗, (h) 穿乗, (i) 損乗, (j) 身外加, (k) 身前加

2. 帰除

(a) 重除, (b) 穿除, (c) 益除, (d) 身外減, (e) 身前減, (f) 暗算法

3. 開方

(a) 積平円, (b) 開立円, (c) 帯従開方, (d) 減従開, (e) 益積開方, (f) 減積開方, (g) 翻積開方, (h) 帰除開方, (i) 損益平方, (j) 相応開方

相乗には全部で11種の方法を列挙されている。それぞれの計算法の原理はつとに知られているが、それだけでは「雑技」の冒頭部分（「雑技」全体の序文および「相乗」の要約）を理解することはむずかしい¹⁴。とくに「相乗」の要約部分は各珠算法における珠の動きを周知していないと、

¹⁴ 「相乗」に関するそれぞれの珠算法の簡明な要約が『明治前日本数学史』第2巻、367-370にある。

正確に理解できないのである。そこでここでは原文の図解を細かく分解して、そろばん上の珠の動きが良くわかるようにした。

(a) 重乗。重乗というのは乗数に真の因数があれば、乗数をその因数で除して、まずその商を被乗数に乘じ、次にその因数を乗ずる方法である。乗数を分解して二度乗ずることから重乗と呼んだのである。たとえば $248 \times 745 = 8 \times (31 \times 745)$ が例示されている。

〔第 2-1 問〕 仮如有布七百四十五端。毎端価銀二十四錢八分。問該銀。

ここには $31 \times 745 = 23095$, $8 \times 23095 = 184760$ のそれぞれの乗法の計算法は述べられていないから、それぞれ留頭乘法によってのであろう。

『大成算経』にはこの一例して挙げられていないから詳細は不明であるが、乗数を $248 = 8 \times 31$ とすると実質的に 3 と 8 とを乗ずるだけになるから（身前加法）、乗算の回数が減る。

(b) 更乗。更乗というのは桁数の少ない方を乗数としてそろばんの左に置き、桁数の多い方をそろばんの右方に置く方法を言う。左右を変更して乗ずることから更乗と呼ぶ。たとえば、

〔第 2-2 問〕 仮如有田六十七町。毎町収米四斗三升九合。問米。

という問題の場合、そろばんの右方に 67 を被乗数として置き、左方に 439 を乗数として置くのが通例だが、桁数の少ない 67 を乗数、桁数の多い 439 を被乗数として、左右を替えて計算する。これは積を置く位置（打ち起こし）のカウントが少なくするための便法であろう。

なお、更乗にはもう一問例示されている。

〔第 2-3 問〕 仮如有雇夫三百六十四人。每人与銀二錢七分五厘。問該銀。

この場合、そろばんの左方に 275、右方に 364 を置くが、そのまま計算せずに、 $275 \times 4 = 1100$, $364 = 91 \times 4$ として 1100×91 を計算する。この場合は乗算が不要で加法のみで計算できるから——実用的かどうかは別にして——例示する価値がある。

(c) 截乗。截乗というのは乗数、被乗数をそれぞれ二数の和にして、分配して乗ずる方法である。截乗とは乗数、被乗数をそれぞれ二数に截り分けて乗ずるという意味であろう。次の例題が挙げられている。

〔第 2-4 問〕 仮如有米二十七斛九斗八升。毎斛価銀五十四錢三分五厘。問計価。

これを $54.35 \times 27.98 = (54 + 0.35) \times (27 + 0.98) = 54 \times 27 + 54 \times 0.98 + 0.35 \times 27 + 0.35 \times 0.98$ として計算する。この例の場合、計算量が減る訳ではなく、例示の数値の意味は不明である。

(d) 弧乗。弧乗というのは二乗を計算する方法である。たとえば 4 桁の数値の場合、

$$\begin{aligned}(abcd)^2 &= (abc0 + d)^2 = (abc0)^2 + (abc0 \times 2 + d) \times d \\(abc0)^2 &= (ab00 + c0)^2 = (ab00)^2 + (ab00 \times 2 + c0) \times c0 \\(ab00)^2 &= (a000 + b00)^2 = (a000)^2 + (a000 \times 2 + b00) \times b00\end{aligned}$$

より、

$$(abcd)^2 = (a000)^2 + (a000 \times 2 + b00) \times b00 + (ab00 \times 2 + c0) \times c0 + (abc0 \times 2 + d) \times d$$

と計算する。計算の原理はこのようであるが、できるだけ少ない桁で以上の計算を実行するために、実際の操作の順序はこの式とは異なる。例示されている問題は次の通りである。

〔第2-5問〕仮如有方田，自方一千三百八十四間．問積．

図示された原文によって，珠の動きを再現すると次のようになる（珠算法の記述では計算過程全体を一つの図に凝縮して表現するのが当時の伝統であるが，以下ではそれを分解して珠の動きを明示する）．

まず $1384^2 = (1380 + 4)^2 = 1380^2 + 2 \times 1380 \times 4 + 4^2$ として，右辺の第2項，第3項を計算する．

初期配置

	5							
1	3	3	4					
上位3桁を2倍して								
	5	5						
2	2	1	4					
尾位の4を二乗して								
	5	5					5	
2	2	1	4			1	1	
4と6とを乗じて								
	5	5				5	5	
2	2	1	4		2		1	
4と7とを乗じて								
	5	5				5	5	
2	2	1	4	3	0		1	
2と4とを乗じて								
	5	5				5	5	
2	2	1	1	1	0		1	

これで第2項，第3項の計算（11056）が完了した．

つぎに $1380^2 = (1300 + 80)^2 = 1300^2 + 2 \times 1300 \times 80 + 80^2$ として，右辺の第2項，第3項を計算する．

	5					5	5	
1	3	3	1	1	0		1	
の上位2桁を2倍して								
	5	5				5	5	
2	1	3	1	1	0		1	
8を二乗して								
	5	5		5		5	5	
2	1	3	1	2	4		1	
6と8とを乗じて								
	5	5	5	5		5	5	
2	1	3	1		4		1	
2と8とを乗じて								
	5			5		5	5	
2	1	2	2		4		1	

これで第2項，第3項の計算（をさきほどの結果に加えて225456）が完了した．

つぎに $1300^2 = (1000 + 300)^2 = 1000^2 + 2 \times 1000 \times 300 + 300^2$ として，右辺の第2項，第3項を計算する．

$$\begin{array}{r} 5 \quad 5 \quad 5 \\ 1 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

の上位1桁を2倍して

$$\begin{array}{r} 5 \quad 5 \quad 5 \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

3を二乗して

$$\begin{array}{r} 5 \quad 5 \quad 5 \\ 2 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

3を2に掛けて

$$\begin{array}{r} 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

これで第2項、第3項の計算（さきほどの結果に加えて915456）が完了した。

最後に 1000^2 を計算する。

$$\begin{array}{r} 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \\ 1 \quad 0 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

の1を二乗して

$$\begin{array}{r} 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \\ 1 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

最上位の1を払い

$$\begin{array}{r} 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \\ 1 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

これが最終的な結果（1915456）である。

(e) 破頭乗。破頭乗とは被乗数の首位から順に乗数に乗ずる方法で、被乗数の首位から順に商へ変化して行くことから破頭乗と呼ばれた。具体的な例題は次の通りである。

〔第2-6問〕 仮如有杉木四百八十二根。每一根価銀三錢七分九厘。問該銀。

これを次のように計算する（太字は被乗数の注目している桁（身）を表す）。

初期配置

$$\begin{array}{r} 5 \quad 5 \quad 5 \\ 3 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \end{array}$$

4と3を乗じて

$$\begin{array}{r} 5 \quad 5 \quad 5 \\ 3 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \end{array}$$

4と7を乗じて

$$\begin{array}{r} 5 \quad 5 \quad 5 \\ 3 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \quad 8 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \end{array}$$

4と9とを乗じて

$$\begin{array}{r} 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \\ 3 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \end{array}$$

8と3とを乗じて

$$\begin{array}{r} 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \\ 3 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \end{array}$$

8と7とを乗じて

	5	5		5			5	
	3	2	4	1	3	1	2	3
8と9とを乗じて		5	5		5		5	
	3	2	4	1	3	1	4	2
2と3とを乗じて		5	5		5		5	
	3	2	4	1	3	2		2
2と7とを乗じて		5	5		5		5	5
	3	2	4	1	3	2	1	1
2と9とを乗じて		5	5		5		5	5
	3	2	4	1	3	2	1	2

(f) 掉尾乗. ^{ちよう}掉尾乗とは、被乗数の尾位から首位に向かって、それぞれ乗数の首位から尾位に向かって乗ずる方法である。たとえば $b_1b_2b_3$ を $a_1a_2a_3$ に乗ずる場合、乗算の順序は $b_1 \times a_3$, $b_2 \times a_3$, $b_3 \times a_3$, $b_1 \times a_2$, $b_2 \times a_2$, $b_3 \times a_2$, $b_1 \times a_1$, $b_2 \times a_1$, $b_3 \times a_1$ となる。掉は「うごく」の意。ここで注意すべきは被乗数の注目された桁（身）は最初の乗法によって商の最上位に変化して消えてしまう点である。すなわち、乗数が2桁以上の場合には被乗数の身は短期記憶されていなくてはならない。次の例題が与えられている。

〔第2-7問〕仮如有金二百五十七兩，買茶。每兩対三十四斤半。問計茶。

そろばん上の珠の動きは次のようになる。

初期配置

	5		5	5				
	3	4		2			2	
3と7とを乗じて		5		5				
	3	4		2		2	1	
4と7とを乗じて		5		5			5	
	3	4		2		2	3	3
5と7とを乗じて		5		5				
	3	4		2		2	4	1
3と5とを乗じて		5		5				5
	3	4		2	1	2	4	1
4と5とを乗じて		5		5				
	3	4		2	1	4	4	1
5と5とを乗じて		5		5	5	5		
	3	4		2	1	4	1	1
3と2とを乗じて								5

	5	5	5	5	5
3	4		2	4	1 1 5
4 と 2 とを乗じて					
	5	5	5	5	5
3	4		3	2	1 1 5
5 と 2 とを乗じて					
	5	5	5	5	5
3	4		3	3	1 1 5

(g) 隔位乗. 隔位乗というのは被乗数の尾位からはじめ, 最初に乗数の尾位, 次に乗数の首位, 最後の乗数の中位を乗ずる方法である. たとえば, $b_1b_2b_3$ を $a_1a_2a_3$ に乗ずる場合, 乗算の順序は $b_3 \times a_3$, $b_1 \times a_3$, $b_2 \times a_3$, $b_3 \times a_2$, $b_1 \times a_2$, $b_2 \times a_2$, $b_3 \times a_1$, $b_1 \times a_2$, $b_2 \times a_1$ である. 例題は次の通りである.

[第2-8問] 仮如有軍人七百二十九名, 各賜糧六斛二斗五升. 問計糧.

これに対して, 珠の動きは以下の通りである.

初期配置

	5	5	5	5	
1	2		2	2	4
5 と 9 とを乗じて					
	5	5	5	5	5
1	2		2	2	4 4
6 と 9 とを乗じて					
	5	5	5	5	5
1	2		2	2	4 4
2 と 9 とを乗じて					
	5	5	5	5	5
1	2		2	2	1 2
2 と 5 とを乗じて					
	5	5	5	5	5
1	2		2	2	2 2
2 と 6 とを乗じて					
	5	5	5	5	5
1	2		2	1	2 2 2
2 と 2 とを乗じて					
	5	5	5	5	5
1	2		2	1	3 1 2
5 と 7 とを乗じて					
	5	5	5	5	5
1	2		2	2	1 1 2
6 と 7 とを乗じて					
	5	5		5	5
1	2		4	4	1 1 2
2 と 7 とを乗じて					
	5	5	5	5	5
1	2		4		1 2

$$\begin{array}{r}
 5 \qquad \qquad 5 \ 5 \ 5 \\
 \hline
 2 \qquad \qquad 4 \qquad 3 \\
 \text{2 と 6 とを乗じて引いて} \\
 5 \qquad \qquad \qquad 5 \ 5 \\
 \hline
 2 \qquad \qquad 4 \ 4 \ 1 \\
 \text{4 と 5 とを乗じて引いて} \\
 5 \qquad \qquad \qquad 5 \ 5 \\
 \hline
 2 \qquad \qquad 4 \ 2 \ 1 \\
 \text{2 と 4 とを乗じて引いて} \\
 5 \qquad \qquad \qquad 5 \ 5 \\
 \hline
 2 \qquad \qquad 3 \ 4 \ 1
 \end{array}$$

この場合、被乗数の身は残ったり（留）、消えたり（破）する。

原文ではこの後に、句訣

一退二五、二退五、三退七五、四留一、五留一二五、六留一五、七留一七五、八留二、
九留二二五

による計算が図解されている。これによれば珠の動きは次のようになる。

初期配置

$$\begin{array}{r}
 5 \qquad \qquad 5 \\
 \hline
 2 \qquad \qquad 4 \ 1 \ 2 \\
 \text{二退五} \\
 5 \qquad \qquad \qquad 5 \qquad 5 \\
 \hline
 2 \qquad \qquad 4 \ 1 \ 1 \\
 \text{六留一五} \\
 5 \qquad \qquad \qquad 5 \ 5 \\
 \hline
 2 \qquad \qquad 4 \ 4 \ 1 \\
 \text{四留一} \\
 5 \qquad \qquad \qquad 5 \ 5 \\
 \hline
 2 \qquad \qquad 3 \ 4 \ 1
 \end{array}$$

「二退五」の「退五」は「身から1位下がって5を減ずる」との意、「六留一五」の「留一五」は「身から15を減ずる」との意、「四留一」の「留1」は「身から1を減ずる」との意である。

(j) 身外加。身外加とは乗数の首位が1の場合に乗数の首位を去ったものを乗じ、1桁を下げて被乗数に加える方法である。たとえば $638 \times 12 = 6380 + (638 \times 2)$, $298 \times 178 = 29800 + (298 \times 78)$. 「身外」とは身の1桁下の桁のことである。例題は次の通りである。

[第2-11問] 仮如有絹。抛呉服率計長六十三丈八尺。問鉄尺長。

これは638に12を乗ずる問題である。珠の動きは次のようになる。

初期配置

$$\begin{array}{r}
 5 \qquad \qquad 5 \\
 \hline
 2 \qquad \qquad 1 \ 3 \ 3 \\
 \text{2 と 8 とを乗じて加えると} \\
 5 \qquad \qquad \qquad 5 \ 5 \\
 \hline
 2 \qquad \qquad 1 \ 3 \ 4 \ 1 \\
 \text{2 と 3 とを乗じて加えると}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5 \quad 5 \quad 5 \\
 \hline
 2 \quad 1 \quad 4 \quad 1 \\
 2 \text{ と } 6 \text{ とを乗じて加えると} \\
 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \\
 \hline
 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1
 \end{array}$$

身外加には乗数が3桁の問題も例示されている。

〔第2-12問〕仮如有運糧雇徒一百七十八人。每人運二斛九斗八升。問計糧。

(k) 身前加。身前加とは乗数の尾位が1の場合、その1を除いたものを乗じて、1桁上げて被乗数に加える方法である。たとえば、 $1592 \times 31 = 1592 \times 30 + 1592$ 。「身前」とは本位の1桁上の桁の意である。「身前加」という名称は王文素『古今算学宝鑑』によるが、これは乗数が2桁で一の位が1のものに対しての名称であった¹⁵。1問が例示されている。

〔第2-13問〕仮如有麦一千五百九十二斛。每斛価銀三十一銭。問該銀。

$$\begin{array}{r}
 5 \quad 5 \\
 \hline
 3 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \\
 1 \text{ と } 3 \text{ とを乗じて加えると} \\
 5 \quad 5 \\
 \hline
 3 \quad 3 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \\
 3 \text{ と } 5 \text{ とを乗じて加えると} \\
 5 \quad 5 \quad 5 \\
 \hline
 3 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \\
 3 \text{ と } 9 \text{ とを乗じて加えると} \\
 5 \quad 5 \\
 \hline
 3 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \\
 2 \text{ と } 3 \text{ とを乗じて加えると} \\
 5 \quad 5 \\
 \hline
 3 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 2
 \end{array}$$

3 『大成算経』における乗法の名称

以上11種の珠算法のうち、破頭乗、掉尾乗、隔位乗は留頭乗とともに『算法統宗』にその名がある。身外加法、身前加法は『算学啓蒙』にあり、身外加法、身前加法はまた損乗とともに『楊輝算法』の「算法通变本末」にある。穿乗（一名飛還）の出典は明らかではない。

ところで、『大成算経』における前節の乗算法の名称に関しては、中国における名称との異同がある¹⁶。まず、『大成算経』における掉尾乗は中国における破頭乗であり、『大成算経』における留頭乗法は中国における掉尾乗である。中国の留頭乗法、隔位乗法に『大成算経』は触れていない。（次表）。

中国	『大成算経』
留頭乗法	なし
掉尾乗法	留頭乗法
隔位乗法	なし
破頭乗法	掉尾乗法

¹⁵ 鈴木前掲論文。

¹⁶ 鈴木久男「建部は何故乗法四法を誤ったか」『国士舘大学政経論叢書』75-76（1991），1-16。

ちなみに、中国の留頭乗法というのは、たとえば7に456を乗ずる場合、
初期配置

4 5 6 7
5と7とを乗じて
4 5 6 7 3 5
6と7とを乗じて
4 5 6 7 3 9 2
4と7とを乗じて
4 5 6 3 1 9 2

とする乗算法である。確かに被乗数の首位は最後まで残るが、乗算の順序は乗数の首位の次から順に下がって行き、尾位を乗じた後、最後に首位を乗ずるのである。また中国における隔位乗法というのは、たとえば7に456を乗ずる場合、

初期配置
4 5 6 7
4と7とを乗じて
4 5 6 7 2 8
5と7とを乗じて
4 5 6 7 3 1 5
6と7とを乗じて
4 5 6 7 3 1 9 2

とする乗算法である。隔位というのは被乗数の身の次から積を置いて行くという意味である。

この異同について鈴木は、『塵劫記』における被乗数の尾位から首位に向かって乗じて行く方法に慣れていた建部賢弘がそれを「留頭乗」と錯覚したものとしている¹⁷。

建部は『算学啓蒙演段諺解』留頭乘法門において、『算学啓蒙』の原文

留頭乘法別規模 起首先従次位呼 言十靠身如隔位 遍臨頭位破身鋪

の「起首先従次位呼」を「起尾先従次位呼」と訂正して注解を施しているから、留頭乗法を誤解していたことは明白である。

なお『大成算経』における(h)穿乗は中国にはない¹⁸。また(g)隔位乗は中国にも日本においても『大成算経』の他には見られない。『大成算経』は「隔位」という語を「一桁おき」と解釈して、独自に推測して乗法を記述したと思われるが、そもそも「隔位乗」という用語の出典も含めて未だ研究が不十分と言わざるを得ない。

¹⁷ 鈴木前掲論文。

¹⁸ 『明治前日本数学史』第2巻、369ページ。

『雑技』冒頭部分の現代語訳

凡例

1. 翻刻部分を四角に囲った。
2. 底本は東大 T20-72（霞洲本）とし、京大数学教室本 A(画像番号 151)，同 A(画像番号 152)と校合した。
3. 翻刻の字下げは見出しおよび段落の最初のみ原文の通りとした。
4. 翻刻は適宜句読点を打った。
5. 翻刻中、一部の漢字は断りなく通行のものにした。
6. 翻刻中、丸括弧は割注部分を示す。
7. 鍵括弧は訳者による注記。原文の丁数および問題番号を示すのに用いた。
8. 翻刻中、*印は注解にある語句を示す。
9. 読み下しは新仮名遣いによった。

雑技

技者所為之総目也*。凡加減者唯進退一遍之用*，而自無其異也。乗除及開方者各至成技，更*数而就簡，転位而打起之属，其品最多矣。本是非貫通之理，故雖常不用，或抛題，或由数，偶有成其功也。是故博纂古今遺法，重挙雜編，而以備一覽也矣。

読み下し 技は所為の総目なり。凡そ加減は進退一遍の用にして、自ずからその異無きなり。乗除及び開方は各成技に至り、数を更して簡に就き、位を転じて打ち起すの属、其の品最も多し。本よりこれ貫通の理にあらざる故に常には用いずと雖も、或いは題に抛り、或いは数に由り、偶其の功を成すあるなり。この故に博く古今の遺法を纂し、重ねて雑篇を挙げて、以って一覽を備うるなり。

現代語訳 計算は数学の要点である。一般に加減は一桁進めたり戻したりするだけでよく、もとよりこの他の方法はない。乗除と開方はそれぞれの方法によって、数値を交換して〔計算を〕簡単にしたり、桁を移動して〔計算結果を〕置き始める〔位置を定める〕仕方など、その種類は非常に多い。これらはすべてに適用できる理をもっている訳ではないから、常に適用できるものではなく、問題に応じ、数値に応じてたまたまうまく行くものである。そこでこれまでの方法を広く集め、さらに雑多な問題を取り上げて、一覽をととのえる。

注解 技者所為之総目也＝「技」を「計算」の意に解した。「所為」とは数学の問題を解く活動一般のことであろう。ここでは簡単に「数学」とした。「総目」は全体の要点。

進退一遍之用＝珠算における加減算では一桁の繰り上がり、繰り下がりなどの繰り返しで計算が進められることを言うか。

更＝物事の順序をかえる。

相乗

乗之遺法有十一也。累而乗者曰重乗。若法*帶約數、則去而相乗、却以其約數乗之也。求寡位而乗者曰更乗。若法數位多、則（凡定盤*之技常依設法于左。其位多者破実身不速、而所為似漸遲*。是故左位少者為專也）依數、或即法実相代、或倍法而折実*、^{〔1丁表〕}或倍実而折法、後相乗之也。別而乗者曰截乗。若法実共數繁、而難為寡位、則各相分遍乗、而後相併之也。不設法而乗者曰孤乗*。若同數自乗、則（異數相乗者無此技）置其數于実、從尾*上至首*皆倍之、以末旧數自呼、逐上倍数相呼畢、次位五因（代二除也）復于旧、又以其數如前相呼、遞如此至実首而乗之也。命於実首者曰破頭乗。以法首相呼、言如對身、言十過身*、心記進退*數、遞至実尾而乗之也。命於実尾者曰棹尾乗*。以法首相呼、如前至実首而乗之也。挾位而命者曰隔位乗。若法三位已上、則自実尾相呼、更至首而乗之也。新為念法*而命者曰穿乗、一名飛還。以法自一至九各相乗、分其數之留退*、而自実尾呼之也。命虧*數反減而^{〔1丁裏〕}適者曰損乗。以法減一（乃法一箇位則減十、法十位則減百也。他倣此。）余為虧法。直相呼則言如次位。言十就身括而命、則為念法。各自実首至尾而損之也。去首而命者曰身外加。法首一則以次位從実尾相呼。如前至首而加之。若首不一則倍折而求一之後加之也。去尾而命者曰身前加。法尾一則以上位從実首相呼、言如身前。言十前二位至尾而加之也*。

読み下し 乗の遺法は十一あるなり。累ねて乗ずるは重乗という。若し法約数を帯びれば、則ち去りて相乗じ、却ってその約数を以て之を乗ずるなり。寡位を求めて乗ずるは更乗という。若し法の數位多ければ、則ち（凡そ定盤の技、常に法を設けること左に依る。其の位の多きものは実の身を破ること速からずして、所為は漸遲に似る。これ故に左位少なきは専らと為すなり。）數に依り、或いは即ち法実相代わり、或いは法を倍して実を折り、或いは実を倍して法を折り、後に之を相乗ずるなり。別にして乗ずる者は截乗という。若し法実共に數繁にして寡位と為し難きは、則ち各相分け遍乗して、後之を相併せるなり。法を設けずして乗ずるは孤乗という。若し同數自乗するは、則ち（異數相乗ずる者は此の技なし）其の數を実に置き、尾の上より首に至るまで皆之を倍し、末の旧數を以て自ら呼び、遂って上の倍数を相呼びて畢る。次位を五因し（二除に代えるなり）旧に復し、又、其の數を以て前の如く相呼び、^{しだ}遞いに此の如く実の首に至りて之を乗ずるなり。実の首に命ずるものは破頭乗という。法の首をもって相呼び、身に対する如く言い、十を言い身を過ぎ、進退の數を心記し、遞いに実の尾に至りて之を乗ずるなり。実の尾に命ずるものは棹尾乗という。法の首を以て相呼び、前の如く実の首に至りて之を乗ずるなり。位を挾んで命ずるものは隔位乗と言う。若し法三已上ならば則ち実の尾より相呼び、更に首に至って之に乗ずるなり。新たに念法を為して命ずる者は穿乗、一名飛還という。法を以て一より九まで各相乗じ、其の數の留退を分ちて実の尾より之を呼ぶなり。虧數に命じ反って減じて適うものは損乗という。法を以て一を減じ（乃ち法一個位ならば則ち十を減じ、法十位ならば則ち百を減ずるなり。他も此に倣う。）余りを虧法と為す。直ちに相呼び、則ち次位の如く言う。十を言えばすなわち身を括りて命じ則ち念法と為す。各実の首より尾に至りて之を損するなり。首を去って命ずるは身外加という。法の首一ならば則ち次位を以て実の尾より相呼ぶ。前の如く首に至りて之を加える。若し首一ならざれば、倍折し一を求めての後之を加えるなり。尾を去って命ずるは身前加という。法の尾一ならば則ち、上位を以て実の首より相呼び、身前の如く言い、十を言うは二位を前にして、尾に至りて之を加うるなり。

現代語訳 これまでに遺されている乗算法は11種類ある。

繰り返して乗ずる方法を重乗という。もし乗數に約數があれば、割って〔その商を〕乗じ、逆にその約数を乗ずる。

桁數の少ない數を〔左方に〕置いて乗じる方法を更乗という。もし乗數の桁數が〔被乗數より

も] 多い場合は（一般にそろばんの計算では常に法を置くのは左方である。その桁数が多いと被乗数の身を破るのが遅く、計算が遅くなる。このため、左方の桁数の少ないのを肝要とする）、数により、乗数と被乗数を替えたり、乗数を2倍して被乗数を折半したり、被乗数を2倍にして乗数を折半してから乗じる。

分割して乗ずる方法を截乗という。もし、乗数、被乗数ともに数が複雑で桁数を少なくできないときは、これらを分けてすべて乗じて、その後これらを合わせる。

乗数を置かずに乗ずる方法を孤乗という。もし同じ数を2乗するときは（異数を乗ずるにはこの技法は適用できない）その数を被乗数〔の位置〕に置き、尾位の上〔の桁〕より首位にいたるまでこれをみな2倍し、もとの末位の数を2乗し、さらに〔末位の数を〕上の〔2〕倍〔した〕数に乘じて〔2乗した数に加え、第一段が〕終わる。〔尾位より上の〕次位を5倍（2で割る代わりである）して元に戻し、さらにこの数を用いて前のように二数と呼んで、このように繰り返して実の首位に至り、2乗する。

〔最初に〕被乗数の首位に乗ずるものを破頭乗という。乗数の首位を呼んで、身に対して〔積を〕言い、十ずつ言って身を〔左へ〕過ぐる。心に進退の桁数を記憶して、次第に実の尾位に至り、乗算をする。

被乗数の尾位に乗ずるものを^{ちよう}掉尾乗という。乗数の首位を相呼んで、前のように被乗数に首位に至り、乗算をする。

位を挟んで乗ずるものは、隔位乗と言う。乗数が3桁以上のとき、乗数の尾位と被乗数の尾位を相乗じ、つぎに首位にこれを乗ずる。

新たに句訣を作り、これによって乗ずるものを穿乗、一名飛環という。乗数を〔被乗数の〕1から9まで各相乗じて、その〔積〕数を身から置き始めるか、身から一桁下がって置き始めるかを区別して、被乗数の尾より乗ずる。

虧数に乘じて、逆に減じて計算するものを損乗という。乗数で1を減じ（乗数が一位〔の数〕なら10から減じ、乗数が十位〔の数〕なら100から減ずる。ほかも同様）、余りを虧法とする。ただちにこれを相乗じ、次の桁より引く。〔乗数が〕十位ならば、全体を一括りにして乗じて句訣を作る。それぞれ被乗数の首位より尾位に至るまで積を減じる。

首位を除いて乗ずるものを身外加という。乗数の首位が1なら、〔首位を除いた〕次位を被乗数の尾より乗じ、前のように首位に至るまで被乗数に加える。もし首位が1でなければ、倍または折半して〔首位を〕1にして、これを〔上のように計算して〕加える。

尾位を除いて乗ずるものを身前加という。法の尾位が1なら、〔尾位を除いた〕上位を実の首より乗じ、身の前に〔積を〕置く。〔法が〕十位なら〔身より〕二桁前にして〔打ち起こし〕、尾に至るまで被乗数に加える。

注解 この段は各珠算法を周知している前提でそれらを要約したものである。各珠算法における珠の動きについては2.2節を参照されたい。

法＝ここでは乗数のこと。そろばん上では左方に置かれる。

定盤＝そろばん。

破実身不速、而所為似漸遲＝乗法は一桁同士のかけ算の繰り返しによってされる。このとき、かけ算の対象となる被乗数の数値のある桁を身という。「身」は『五技』「因乗」に初出。実は被乗数のこと。乗算の回数は同じであるが、乗数の桁数が多いと、商を置く位置（打ち起こし）までの桁下がり、桁上がりが多くなり、被乗数の身を払う（実の身を破る）のが遅くなる。「所為似漸遲」は桁下がり、桁上がりの計数の手間だけ計算が遅くなることを言うのであろう。

倍法而折実＝たとえば、88（実）に125（法）を乗じる場合、法を8倍すると1000、実を8で割ると11となり、法の実質的な桁数を少なくすることができる。原文は法を2倍、実を折半とし

ているが、後に〔第2-3問〕では法を4倍、実を4で割る例がある。この部分は2倍、折半という具体的な値を利用して、一般のことを述べていると解すべきである。

孤乗＝法をおかない乗算であるが、ここでは2乗のことを指している。

尾＝末位。

首＝最上位。

言十過身＝委曲不明。破頭乗では乗数の桁数だけ被乗数の身より左に移動した桁から商を置くことを述べたものであろう。ここでは「十ずつ言って身を〔左へ〕過ぎる」と訳しておいた。

進退＝「進」は桁を左に移動すること、「退」は桁を右に移動することを言う。

掉尾乗＝掉は「ちょう」または「とう」、動くこと。

念法＝句訣。

留退＝「留」は乗算の結果を身の桁から置くこと、「退」はその右の桁から置くこと。

虧＝欠ける。虧欠。

言十前二位至尾而加之也＝乗数が2桁の場合は被乗数の身より「一、十」と前（左）に二桁数えて、その桁を積を置き始める位置（打ち起こし）とする。三桁以上の場合にも同様にできるが、ここは乗数が二桁の場合を述べているようである。

email: ogawa@yokkaichi-u.ac.jp